آموزشی

حمیدرضا امیری

گراف دوستی!

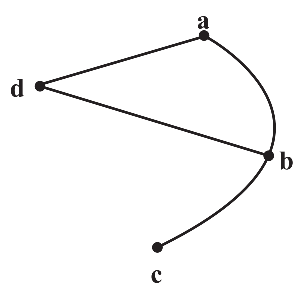
مقدمه

فرض کنید در یک کلاس ۲۵ نفر دانش‌آموز حضور داشته باشند. آیا امکان دارد هر یک از دانش‌آموزان این کلاس دقیقاً با ۳ نفر از هم‌کلاسی‌های خود دوست باشند؟ برای پاسخ به این سؤال و بدون استفاده از قضایای کمکی زحمت زیادی باید کشیده شود و زمان نسبتاً طولانی صرف یافتن پاسخ خواهد شد.
نظریهٔ گراف از جمله شاخه‌های مهم در ریاضیات است که کاربردهای بسیاری در علم ریاضی و سایر علوم دارد. امروزه در شیمی، باستان‌شناسی، و ورزش‌های گروهی و دو نفری مثل شطرنج کاربردهای فراوانی از این شاخهٔ ریاضیات می‌توان مشاهده کرد. حال مسئله‌ای طرح می‌کنیم و سپس با تعاریف مقدماتی از گراف و پس از بحث درباره تعداد گراف‌ها و شمارش آن‌ها و با استفاده از اولین قضیه در گراف به این مسئله پاسخ خواهیم داد.

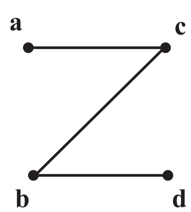
تعریف گراف ساده

برای تعریف یک گراف ساده به دو مجموعه نیاز داریم: یکی مجموعه‌ای ناتهی و متناهی به‌نام «V» که آن را «مجموعهٔ رأس‌ها» می‌نامیم و دیگری مجموعه‌ای به‌نام «E» که آن را «مجموعهٔ یال‌ها» می‌نامیم. هر عضو E زیرمجموعه‌ای دو عضوی از V است. برای مثال، اگر فرض کنیم $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{\{a,b\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\}\}$، برای رسم گراف متناظر با V و E ابتدا به ازای هر عضو V یک نقطه یا رأس در صفحه مشخص می‌کنیم. سپس به ازای هر عضو E یک یال بین آن دو رأس رسم می‌کنیم.

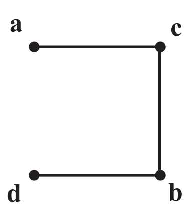
توجه دارید که فاصلهٔ رأس‌ها از یکدیگر و ترتیب قرار گرفتن آن‌ها اهمیت ندارد و در واقع شکل ظاهری گراف‌ها مهم نیست و حتی می‌توان یال‌ها را به‌صورت منحنی نیز رسم کرد.



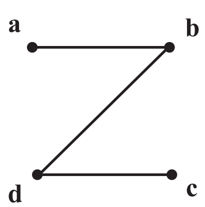
حال این سؤال پیش می‌آید که مثلاً با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d\}$ چه تعداد گراف ساده می‌توان تعریف کرد؟ برای پاسخ به این سؤال به این نکته توجه داشته باشید که دو گراف که رئوس آن‌ها نام‌گذاری شده است، در صورتی متمایز هستند که مجموعهٔ یال‌های آن‌ها با هم برابر نباشد. در غیر این‌صورت دو گراف، یکسان و یا اصطلاحاً یکریخت هستند. به‌عنوان مثال، در شکل زیر، گراف‌های G_1 و G_2 با هم و G_3 و G_4 نیز با هم یکریخت هستند.



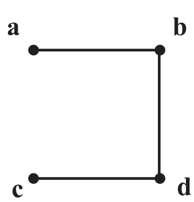
G_1



G_2

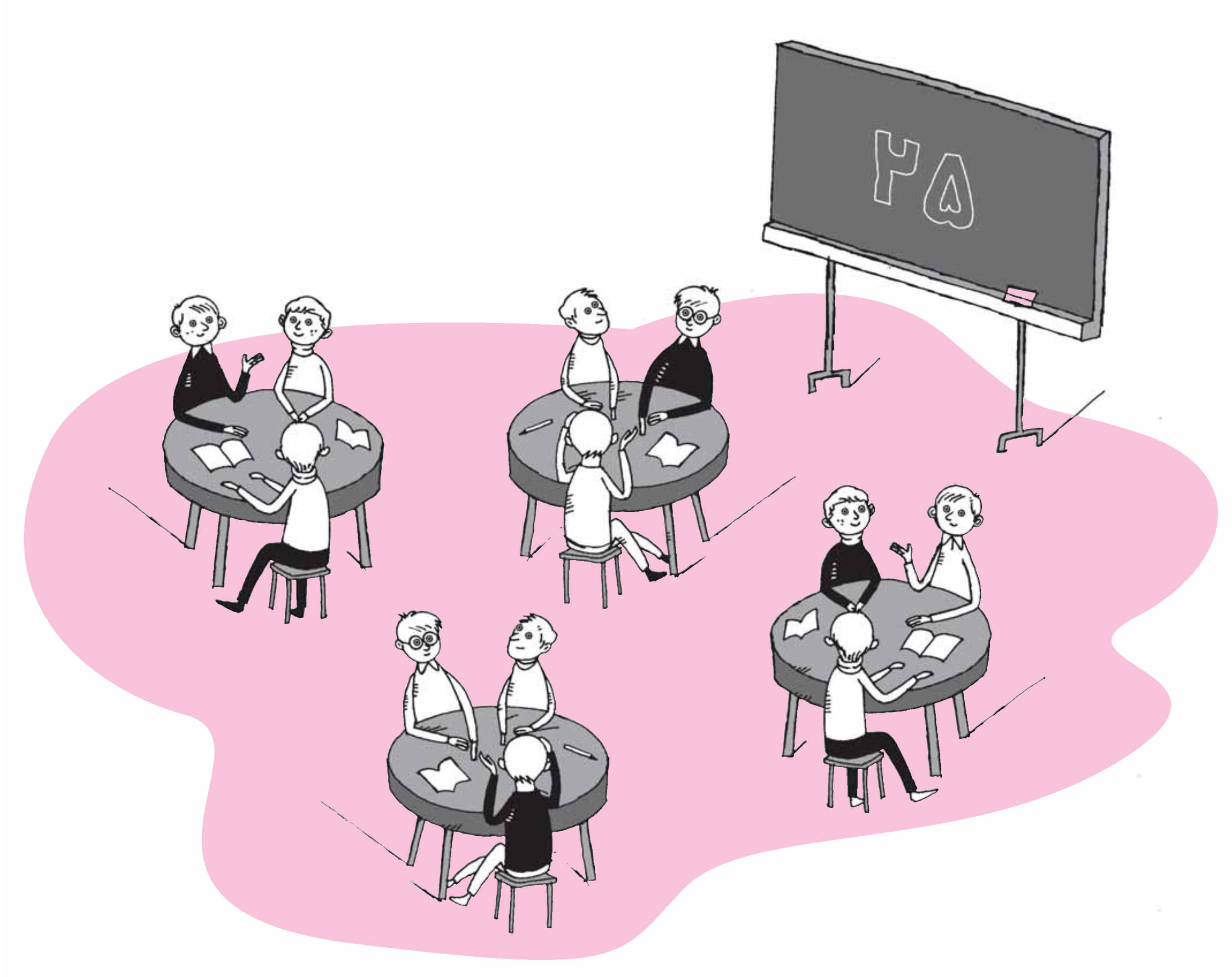


G_3



G_4

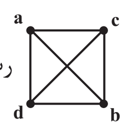
اگر رأس‌ها نام‌گذاری نشده باشند، هر چهار گراف، یکریخت هستند.

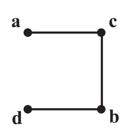


حالا شما جدول زیر را کامل کنید و پس از آن دوباره به سؤال قبل برمی‌گردیم.

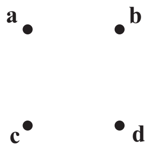
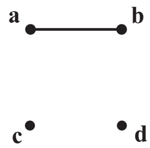
V	**{a,b,c,d}**
$EG_۱$	{ac,cb,bd}
$EG_۲$	{ac , ... , ...}
$EG_۳$	{ab , ... , ...}
$EG_۴$	{... , cd , ...}

برای رسیدن به پاسخ سؤال، مجموعهٔ همهٔ یال‌های ممکن با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d\}$، یا به‌عبارت دیگر، همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضویِ V را که تعدادشان $\binom{۴}{۲} = ۶$ است، تشکیل می‌دهیم و نام آن را E_{max} می‌گذاریم؛ یعنی $E_{max}=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$.

گراف متناظر با E_{max} به‌صورت  رسم می‌شود.

با کمی دقت مشاهده می‌کنید، هر گرافی که با مجموعهٔ رئوس {a,b,c,d} تعریف شود، با حذف یک یا چند یال از گرافِ متناظر با E_{max} به‌دست می‌آید. مانند  که از حذف یال‌های ab، ad و cd به‌دست آمده است. به‌عبارت دیگر، هر زیرمجموعهٔ E_{max} یک گراف ساده با مجموعهٔ رئوسِ V است. تعدادی از زیرمجموعه‌های E_{max} و گراف‌های متناظر با هر یک را در جدول زیر می‌آوریم. شما این جدول را کامل کنید.

نظریهٔ گراف از جمله شاخه‌های مهم در ریاضیات است که کاربردهای بسیاری در علم ریاضی و سایر علوم دارد. امروزه در شیمی، باستان‌شناسی، و ورزش‌های گروهی کاربردهای فراوانی از این شاخهٔ ریاضیات می‌توان مشاهده کرد

مجموعهٔ یال‌ها	$E_۱=\{\ \}$	$E_۲=\{ab\}$	$E_۳=\{ab,cd\}$	$E_۴=\{bc,bd,ad\}...$
گراف				

می‌دانیم که مجموعهٔ ۶ عضویِ E_{max} دارای $۶۴=۲^۶$ زیرمجموعه است و مشاهده کردید که هر زیرمجموعه از این ۶۴ زیرمجموعه یک گراف ساده با مجموعهٔ رئوس V تعریف می‌کند. پس تعداد کل گراف‌های ساده که با مجموعهٔ رئوسِ V={a,b,c,d} می‌توان تعریف کرد، برابر است با $۲^{\binom{۴}{۲}} = ۲^۶ = ۶۴$. در حالت کلی، اگر تعداد رأس‌ها |V|=p باشد، تعداد کل گراف‌های ساده که با این p رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با عددِ $۲^{\binom{p}{۲}}$.

حال اگر سؤال شود چه تعداد گراف ساده با مجموعهٔ رئوسِ V={a,b,c,d} می‌توان تعریف کرد که همگی آن‌ها دارای یال ab باشند، یا دو رأس a و b در همهٔ آن‌ها مجاور باشند، چه پاسخی می‌دهید؟ درست است. اول یال ab را برای هر یک از زیرمجموعه‌ها انتخاب می‌کنیم. حال اگر از مجموعهٔ ۵ عضویِ E={ac,ad,bc,bd,cd} هر زیرمجموعه‌ای در نظر بگیریم و ab را به آن اضافه کنیم، گرافی تعریف می‌شود که در آن یال ab وجود دارد و تعداد آن‌ها $۲^{\binom{۴}{۲}-۱} = ۳۲$ است. در حالت کلی، تعداد همهٔ گراف‌های ساده‌ای که با مجموعهٔ رئوس $V=\{V_۱,V_۲,...,V_p\}$ می‌توان نوشت که در همهٔ آن‌ها k یالِ مشخص وجود داشته باشد، از رابطهٔ $۲^{\binom{p}{۲}-k}$ به‌دست می‌آید.

حال برمی‌گردیم به سؤالِ مربوط به دانش‌آموزان کلاس و دوست بودنِ هر یک از آن‌ها با ۳ نفر از هم‌کلاسی‌های خود. به این منظور به قضیهٔ زیر و نتیجهٔ آن اشاره می‌کنیم:

قضیه: در هر گراف از مرتبهٔ p (دارای p رأس) و اندازهٔ q (دارای q یال)، مجموع درجاتِ رئوس برابر است با دو برابر تعداد یال‌هایِ آن گراف؛ یعنی:

$$\deg V_۱ + \deg V_۲ + \ldots + \deg V_p = ۲q$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{p} \deg V_i = ۲q$$

نتیجه: در هر گراف از مرتبهٔ p و اندازهٔ q همواره تعداد رأس‌های فرد (رأس‌هایی که درجهٔ آن‌ها فرد است) عددی زوج است.

(این قضیه و نتیجهٔ حاصل از آن در کتاب درسی اثبات شده‌اند.)

به‌عبارت دیگر، براساسِ نتیجهٔ فوق تعداد رأس‌های فرد در یک گراف نمی‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا... باشد. برای مثال، آیا می‌توان گرافی با ۲۵ رأس تعریف کرد که درجهٔ هر رأسِ آن ۳ باشد؟ با توجه به توضیح فوق، گرافی که ۲۵ رأس داشته و درجهٔ همهٔ رئوس آن فرد باشد، قابل تعریف نیست. یعنی تعداد رأس‌های فرد (رأس درجهٔ ۳، فرد است) نمی‌تواند فرد باشد. بنابراین اگر هر دانش‌آموز در آن کلاس را یک رأس فرض کنیم و رابطهٔ دوستی بین دو دانش‌آموز را با یک یال نشان دهیم، باید گرافی شاملِ ۲۵ رأس داشته باشیم که هر رأس آن از درجهٔ ۳ (از درجه فرد) باشد و این موضوع طبق نتیجهٔ فوق غیرممکن است. پس پاسخ سؤالِ مذکور منفی است.

همان‌طور که دیدید خیلی کوتاه ولی دقیق به این سؤال پاسخ داده شد. حال شما به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) چه تعداد گراف با مجموعهٔ رئوس V={a,b,c,d,e} می‌توان تعریف کرد که همگی در یال bc مشترک باشند، ولی هیچ‌کدام یال de نداشته باشند؟

ب) چه تعداد گراف با مجموعهٔ رئوس V={a,b,c,d,e} با اندازهٔ ۴ می توان تعریف کرد که در آن‌ها دو رأس b و e مجاور باشند؟

ج) در یک کلاس درس با بیست دانش‌آموز، رابطهٔ دوستی بین دانش‌آموزان را به چند طریق مختلف ممکن است تعریف کرد، اگر بدانیم علی و رضا که دو دانش‌آموز آن کلاس هستند، با هم دوست هستند؟